Cap. 3

PLASTICIDAD DE MEDIOS CONTINUOS

- Criterio de plastificación (límite elástico generalizado)
- Ley de flujo plástico
- Endurecimiento por deformación plástica
- Concepto de deformación plástica *efectiva* o *equivalente*
- Criterios de Von Mises y Tresca
- Criterios para materiales plásticamente anisótropos

- Aplicación: conformado de chapas metálicas

V. 2007

PLASTICIDAD DE MEDIOS CONTINUOS

- Fenomenología macroscópica de la plasticidad

  - A efectos prácticos, existe un ***límite elástico***
  - Pasado ese límite, hay **deformación irreversible** (además de la elástica que corresponda a la tensión aplicada)
  - **Fenómeno fuertemente disipativo que exige siempre realizar trabajo**
  - **Dependiente de la temperatura y de la velocidad de deformación**
  - Ocurre **sin cambio apreciable de volumen**:
  - **Inmune a estados hidrostáticos de tensiones**: $\varepsilon_v^p = 0$
  - Se acompaña, generalmente, de ***endurecimiento no lineal*** σ_h
  - Ese endurecimiento manifiesta que **ocurren cambios estructurales (internos) irreversibles** en el material
  - El "estado deformado" es metaestable. El tratamiento térmico de ***"recristalización"*** **regenera la estructura** (la devuelve aproximadamente a la situación previa no deformada). Puede ocurrir *recristalización dinámica*.

CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN

$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \Rightarrow$ sólo deformación elástica

$f(\sigma_{ij}) = 0 \Rightarrow$ límite elástico

$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = 0 \Rightarrow$ *carga neutra* (paseo por el límite elástico)

$f(\sigma_{ij}) > 0 \Rightarrow \sigma_{ij}$ sólo es accesible tras deformación plástica

$$\begin{cases} f(\sigma_{ij}) = 0 \\ f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) > 0 \xrightarrow{d\varepsilon_{ij}^{p}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{p} > 0 \end{cases}$$

[Material endurecible, "plásticamente estable"]

$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) < 0 \Rightarrow$ descarga elástica

INDEPENDENCIA DE LA TENSIÓN HIDROSTÁTICA

$$\forall \sigma_h$$

$$f\left(\sigma_{ij}\right) \leq 0 \quad \Rightarrow f\left(\sigma_{ij} + \sigma_h\right) \leq 0$$

$$\begin{cases} f\left(\sigma_{ij}\right) = 0 \\ f\left(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}\right) > 0 \xrightarrow{d\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > 0 \\ f\left(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij} + \sigma_h\right) > 0 \xrightarrow{d\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > 0 \end{cases}$$

LEY DE FLUJO PLÁSTICO

Teoría de plasticidad con ley de flujo plástico asociada al criterio de plastificación.

[Existen teorías con leyes de flujo disociadas del criterio; las derivan de una función "potencial plástico"]

"Ley de perpendicularidad", derivable del "Principio del trabajo plástico máximo" (o del "Postulado de Drucker")

Para un incremento infinitesimal $d\sigma_{ij}$ de un estado de tensiones σ_{ij}, para los que se cumpla la condición de plastificación,

$$f\left(\sigma_{ij}\right)=0 \qquad\qquad f\left(\sigma_{ij}+d\sigma_{ij}\right)>0$$

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}d\lambda$$

$d\lambda$: es un factor escalar de proporcionalidad, <u>propiedad del material</u> (a determinar experimentalmente)

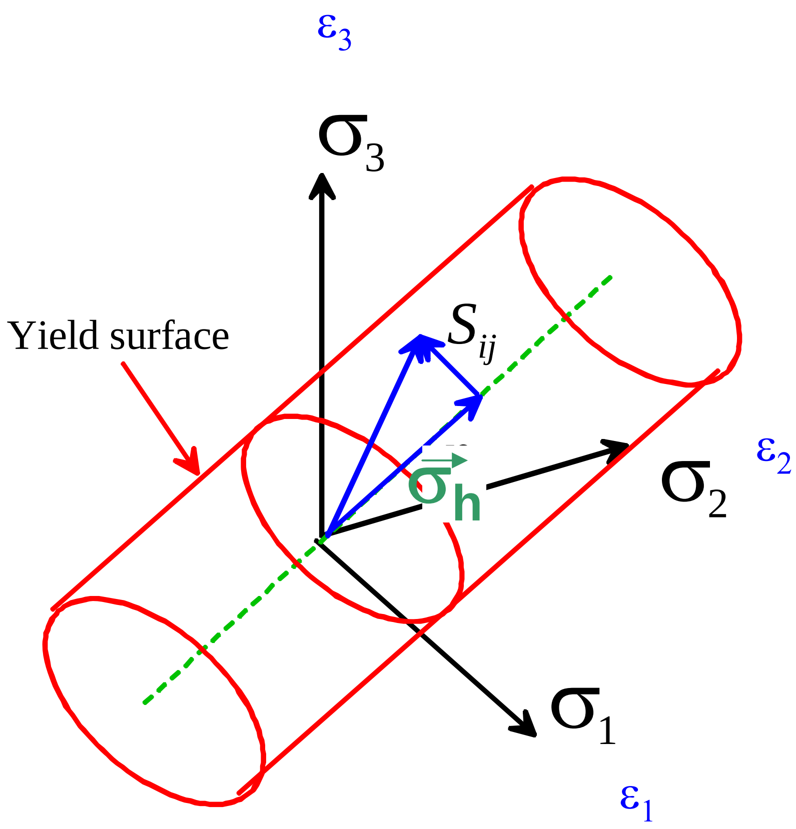
[En esta teoría, *f* hace la función del "potencial plástico" de las leyes de flujo disociadas del criterio de plastificación]

La “ley de perpendicularidad” hace referencia al “LUGAR DE PLASTIFICACIÓN” (*yield locus):*

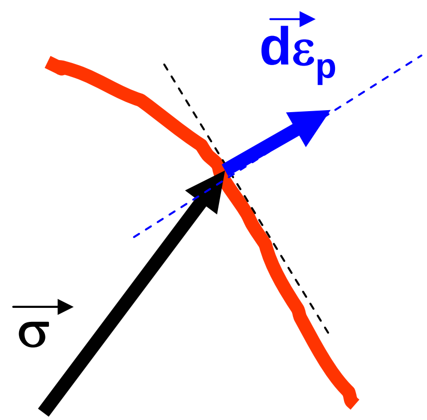
El criterio de plastificación se puede representar gráficamente como ***el lugar geométrico de los puntos del “espacio de tensiones” que constituyen el límite elástico generalizado para un “estado” dado del material.***

Ese espacio es el hiperespacio cuyas coordenadas son las componentes de tensión (6 componentes, reducibles a 5 independientes por la independencia plástica de las tensiones hidrostáticas). **El lugar de plastificación es una superficie cilíndrica cuya generatriz tiene la dirección de las tensiones hidrostáticas.**

Si se superpone a este espacio de tensiones otro dual de componentes de deformación plástica con idénticos subíndices (hay también 6 componentes, 5 independientes por la invariabilidad del volumen), **el incremento de deformación plástica correspondiente a la plastificación producida por un estado de tensiones sobre el lugar de plastificación es un vector incremento de deformación plástica perpendicular a la superficie de plastificación en el punto de plastificación.**



ε_3
σ_3
Yield surface
S_{ij}
$\vec{\sigma}_h$
σ_2
ε_2
σ_1
ε_1



$\vec{d\varepsilon_p}$
$\vec{\sigma}$

El “Principio del trabajo plástico máximo” implica también que la función de plastificación tiene que ser convexa
(cóncava vista desde el interior de la zona puramente elástica).

La función *f*, además, debe cumplir la condición de que las deformaciones volumétricas plásticas que se deriven de ella sean nulas, de acuerdo con las observaciones empíricas.

PARA MATERIALES ISÓTROPOS:

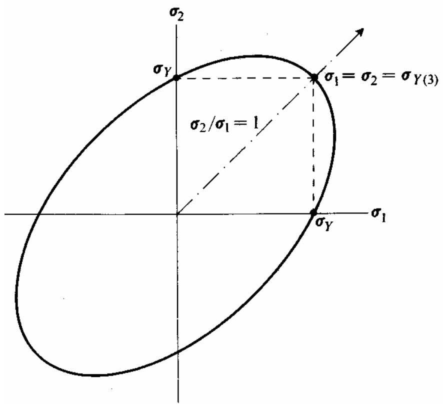
El criterio de plasticidad se describe suficientemente bien mediante una función sencilla que contiene un solo parámetro dependiente del material (su estructura instantánea, dependiente de su historia previa) y condiciones de deformación (temperatura, velocidad).

Los dos criterios más comúnmente utilizados son los de Von Mises y Tresca

CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN DE VON MISES

Materiales isótropos

$$\left[\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{22}-\sigma_{23}\right)^2+\left(\sigma_{33}-\sigma_{11}\right)^2+\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2\right]+3\left(\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2+\sigma_{12}^2\right)\right]^{1/2}-\overline{\sigma}=0$$



LEY DE FLUJO PLÁSTICO

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}d\lambda$$

$$d\varepsilon_{11}^{p}=\frac{2\sigma_{11}-\sigma_{22}-\sigma_{33}}{\overline{\sigma}}d\lambda$$

$$d\varepsilon_{22}^{p}=\frac{2\sigma_{22}-\sigma_{33}-\sigma_{11}}{\overline{\sigma}}d\lambda$$

$$d\varepsilon_{33}^{p}=\frac{2\sigma_{33}-\sigma_{22}-\sigma_{11}}{\overline{\sigma}}d\lambda$$

$$d\varepsilon_{32}^{p}=\frac{3\sigma_{23}}{\overline{\sigma}}d\lambda$$

$$d\varepsilon_{31}^{p}=\frac{3\sigma_{31}}{\overline{\sigma}}d\lambda$$

$$d\varepsilon_{12}^{p}=\frac{3\sigma_{12}}{\overline{\sigma}}d\lambda$$

Richard von Mises (Lemberg -now Lviv, Ukrainie- 19 April 1883 - Boston, 14 July 1953) was a scientist who worked on fluid mechanics, aerodynamics, aeronautics, statistics and probability theory.

He described his work in his own words shortly before his death as being on

> *"practical analysis, integral and differential equations, mechanics, hydrodynamics and aerodynamics, constructive geometry, probability calculus, statistics and philosophy"* (in the line of neo-positivist Ernst Mach; both belonging to the 20's Vienna circle of logical empiricism).

His literary interests included the Austrian novelist Robert Musil and the poet Rainer Maria Rilke, on whom he became a recognized expert. His brother Ludwig is the famous economist.

Wikipedia

Si se mantiene la isotropía del material, el endurecimiento provoca simplemente un cambio de escala de la función que determina el límite elástico instantáneo (o “tensión de fluencia” plástica, *flow stress*). En general, **el endurecimiento se adecúa suficientemente bien a dos hipótesis alternativas:**

a) $$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\left(w_p\right)$$

$$w_p = \int dw_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \qquad \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$$

b) $$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\left(\bar{\varepsilon}\right)$$

$$\bar{\varepsilon} = \int d\bar{\varepsilon} \geq 0$$

$$\frac{3}{2}\left(d\gamma_{23}^2 + d\gamma_{31}^2 + d\gamma_{12}^2\right)$$

$$d\bar{\varepsilon} = +\sqrt{\frac{2 d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}{3}} = +\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\left[\left(d\varepsilon_{22}^p - d\varepsilon_{33}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{33}^p - d\varepsilon_{11}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{11}^p - d\varepsilon_{22}^p\right)^2\right] + 6\left[d\varepsilon_{23}^{p\,2} + d\varepsilon_{31}^{p\,2} + d\varepsilon_{12}^{p\,2}\right]\right]^{\frac{1}{2}}$$

El primer criterio equivale a considerar equivalentes deformaciones plásticas que implican el mismo trabajo plástico (concepto de *work equivalent strain):*

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}\left(w_p\right) \geq 0$$

Para un *"material Von Mises"* ambas hipótesis coinciden:

$$dw_p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}$$

$$d\lambda = \frac{d\bar{\varepsilon}}{2} = \frac{d\bar{\sigma}}{2\bar{\Theta}} = \frac{dw_p}{2\bar{\sigma}}$$

Comportamiento tensión-deformación

Endurecimiento decreciente con el progreso de la deformación, hasta saturación de la tensión de flujo plástico para deformaciones acumuladas muy grandes

Para deformaciones moderadas (ec. de **Hollomon**):

$$\bar{\sigma} \cong K\bar{\varepsilon}^{n} \qquad 0 \leq n \leq 0.5$$

Para deformaciones grandes (ec. de **Voce**):

$$\frac{\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_y} = \exp\left(-\frac{\bar{\Theta}_0}{\bar{\sigma}_s}\bar{\varepsilon} \right)$$

Derivando, la ecuación de Voce es:

$$\overline{\Theta} = \frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\varepsilon}} = \overline{\Theta}_0 \left(1 - \frac{\overline{\sigma}}{\overline{\sigma}_s} \right)$$

Para grandes deformaciones, tiende asintóticamente a la saturación de la tensión equivalente

(en general, es lo que ocurre experimentalmente)

El endurecimiento por deformación puede ser bastante más rico que el descrito por Hollomon o Voce:

• Puede darse ablandamiento tras una fase de endurecimiento inicial, o incluso un comportamiento oscilante, cuando se produce recristalización dinámica (alta temperatura, materiales con baja energía de defectos de apilamiento)

• Puede haber transitorios de ablandamiento al cambiar de trayectoria en el espacio de componentes de deformación plástica

• La transición elástico-plástica con una meseta inicial sin endurecimiento o curvas tensión-deformación con dientes de sierra son fenómenos ligados a, respectivamente, envejecimiento estático (SSA) o dinámico (DSA).

DEPENDENCIA DE LA TEMPERATURA Y VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\left(\bar{\varepsilon}, T, \dot{\bar{\varepsilon}}\right)$$

Aproximadamente, suele ser aceptable:

$$\bar{\sigma}\left(\bar{\varepsilon}, T\right) \propto \dot{\bar{\varepsilon}}^{\,m} \qquad 0 \leq m \leq 1$$

[En algunos casos, m puede ser negativo, vg., DSA]

Comportamiento potencial (*power law creep*)

La plasticidad es un proceso activado térmicamente, la velocidad de deformación plástica se ajusta a una *ecuación de Arrhenius*

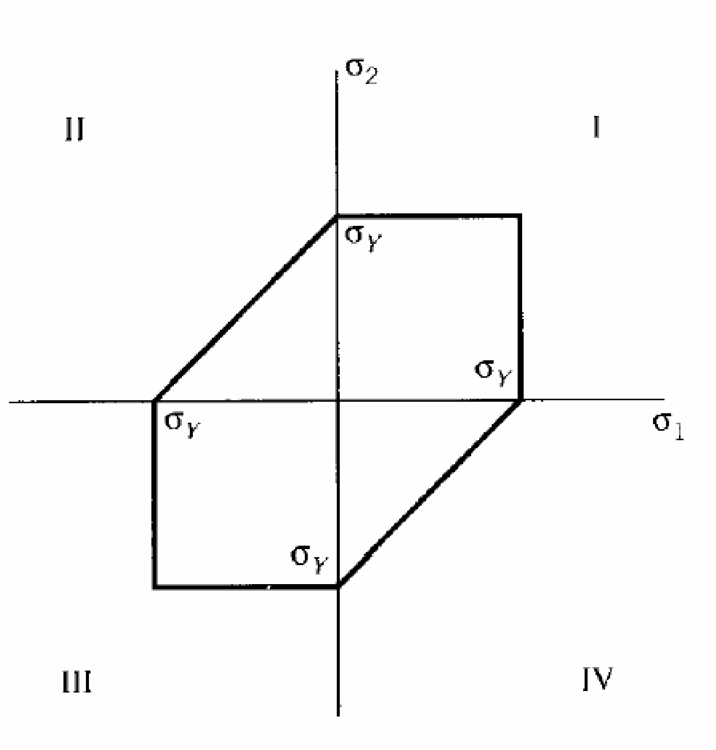
$$\dot{\bar{\varepsilon}} = A\bar{\sigma}^{1/m} e^{-\frac{Q}{RT}}$$

[para temperaturas bajas y medias $T \approx 0.5T_M$]

CRITERIO DE TRESCA

Materiales isótropos

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \bar{\tau}$$

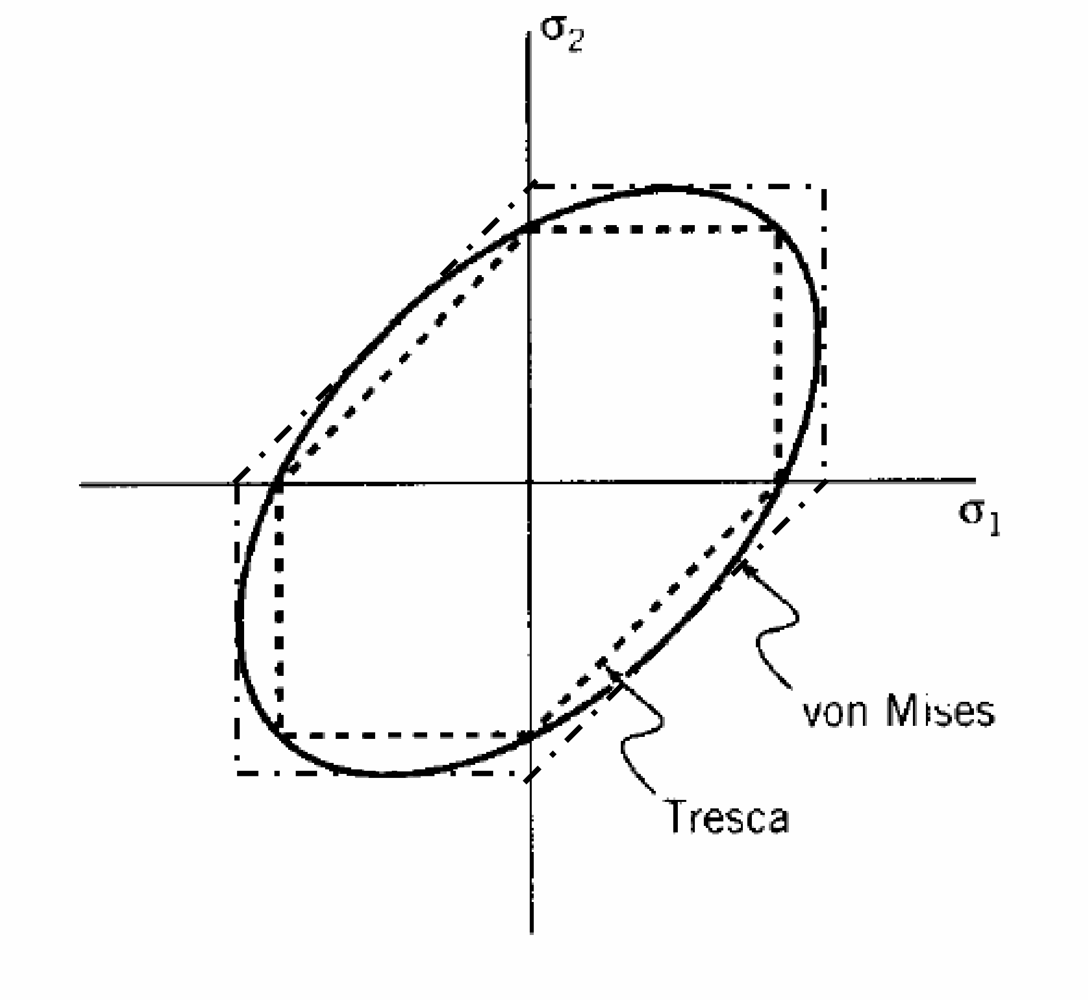


Henri Tresca (1814–1884) was French Mechanical Engineer, professor of Conservatoire National des Arts et Métiers in Paris.
He is the author of **Tresca stress** (or maximal shear stress) criterion of material failure. Tresca stress criterion is one of two main failure criteria used today.

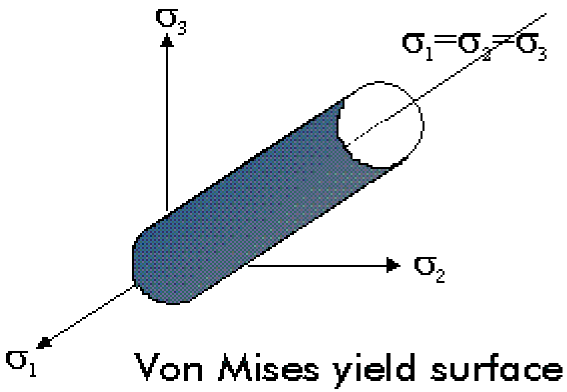
Tresca's criterion was so important for practical engineering, that Eiffel put his name on number 3 in his list of 72 people making the tower possible.

Tresca was also the author of the standard metre.

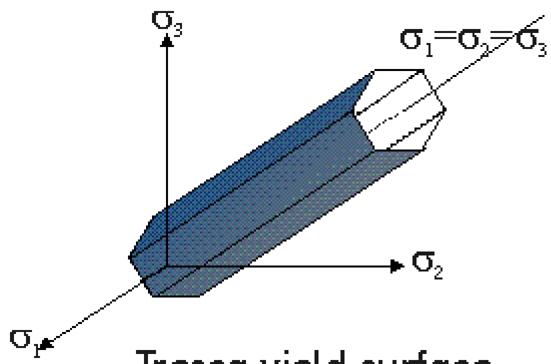
Wikipedia



$$2\bar{\tau} \geq \bar{\sigma} \geq \sqrt{3}\bar{\tau}$$

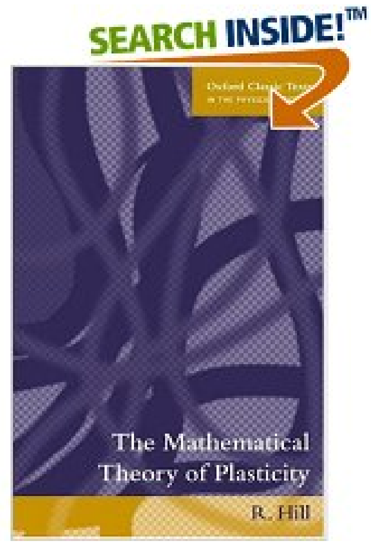


Von Mises yield surface



Tresca yield surface

CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN DE HILL PARA MATERIALES ORTÓTROPOS



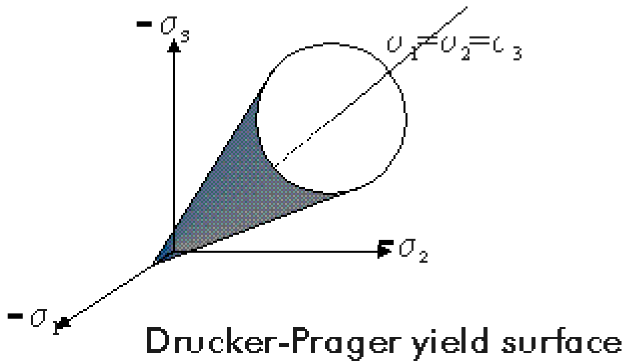
Es una generalización del criterio de Von Mises:

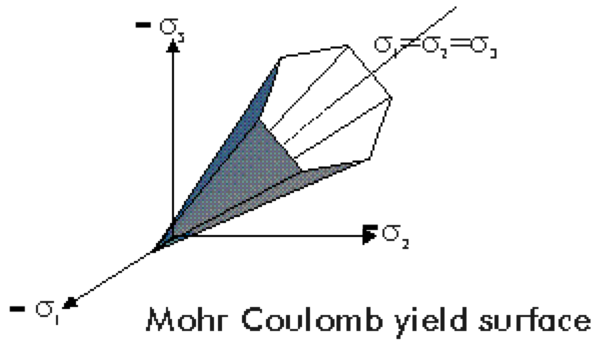
$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(L\sigma_{23}^2 + M\sigma_{31}^2 + N\sigma_{12}^2) - 1 = 0$$

$$(\sigma_{11})_y = 1 / (G + H)^{1/2}$$
$$(\sigma_{22})_y = 1 / (F + H)^{1/2}$$
$$(\sigma_{33})_y = 1 / (G + F)^{1/2}$$

[Hay otros criterios más recientes para materiales anisótropos]

Criterios de plasticidad dependiente de la tensión hidrostática
(suelos y materiales granulares, baja cohesión)





APLICACIÓN a un caso de gran interés técnico:

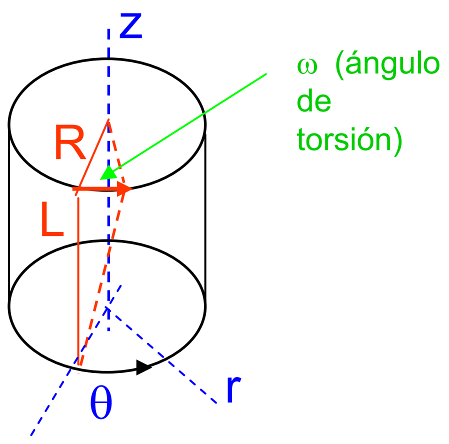
ANISOTROPÍA PLÁSTICA DE CHAPAS METÁLICAS

(véase el texto: “Thin sheet story”)

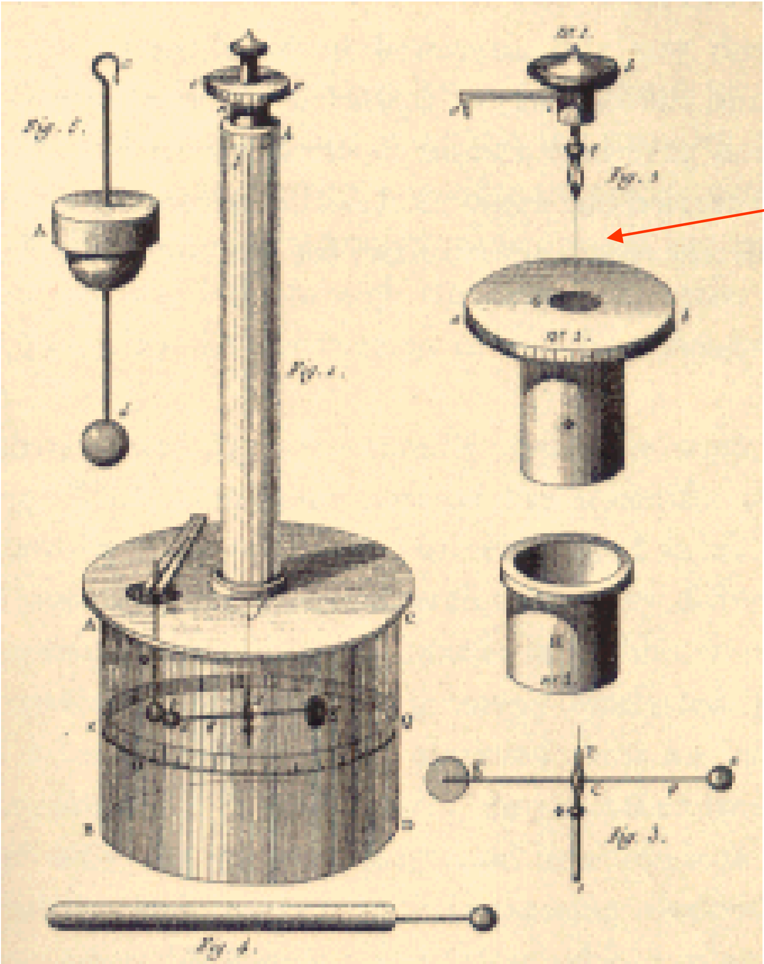
EJERCICIO:

Análisis del ensayo de torsión de una probeta cilíndrica de un material elástico-plástico isótropo que muestre endurecimiento por deformación plástica. Derívese la curva (tensión-deformación) a partir de la curva (par M-ángulo de torsión ω) medida experimentalmente.
Úsense coordenadas cilíndricas, r,θ,z.

[Este problema fue solucionado por Nadai en 1950]



Aplicación de la torsión (elástica) de un cilindro:
La balanza de torsión de Coulomb (1785)



Alambre de plata

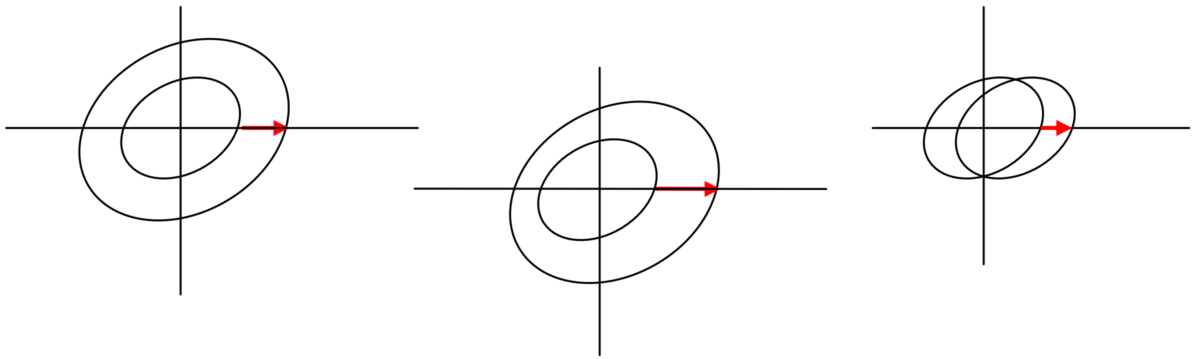
La usó para medir la fuerza entre cargas eléctricas y validar la luego llamada *“Ley de Coulomb”*

Inclusión en la Plasticidad de Medios Continuos de efectos de cambios de trayectoria plástica que se observan experimentalmente (efecto Bauschinger generalizado):

Concepto de **“endurecimiento cinemático”** vs. **“endurecimiento intrínseco”**

Endurecimiento intrínseco: el lugar de plastificación se dilata al deformar plásticamente

Endurecimiento cinemático: el lugar de plastificación se desplaza en la dirección de carga



En la realidad se simultanean ambos tipos de endurecimiento

Concepto de **material plástico "ideal": sin endurecimiento**

Es inestable; la deformación se localiza fácilmente en cuanto plastifica, es decir, en cuanto se alcanza la condición $f(\sigma_{ij}) = 0$

El endurecimiento por deformación o la dependencia de la tensión de plastificación respecto a la velocidad de deformación (cuando *m* > 0) tienden a estabilizar la deformación plástica y alejan el peligro de localización d ela deformación.